Análsis matemático

Temario de Análisis real

1. Nociones de conjuntos y funciones: operaciones entre conjuntos, álgebra de conjuntos, familias de conjuntos, conjuntos finitos, conjuntos numerables.
2. Números reales: axiomas de campo, de orden y del supremo, propiedades de valor absoluto, propiedad arquimediana.
3. Sucesiones: sucesiones y límites de sucesiones, propiedades de los límites, sucesiones monótonas, subsucesiones y criterio de Cauchy.
4. Límites de funciones: definición, propiedades, teoremas sobre límites, límites laterales, límites infinitos y límites en infinito.
5. Continuidad de funciones: tipos de discontinuidad, teorema del valor intermedio y teorema del máximo.
6. Derivación: interpretación geométrica de la derivada, propiedades, reglas de derivación, regla de la cadena, derivación implícita y derivadas de orden superior.
7. Aplicaciones de la derivada: rapidez de variación, extremos de funciones, teorema de Rolle y del valor medio, análisis de gráficas de funciones, regla del L'Hospital y problemas de optimización.
8. Integración: Integral definida, propiedades y teorema fundamental del cálculo.
9. Métodos de integración: Cambio de variable, por partes, por sustitución trigonométricas y por fracciones parciales.
10. Aplicaciones de la integral: área de una región entre dos curvas, volúmenes, longitud de arco, área de superficie, momentos, centros de masa, centroides y, presión y fuerza de un fluido.

11. Series: convergencia, serie armónica, serie p, comparación de series, series alternantes, criterios del cociente, criterio de la raíz, y polinomios de Taylor y aproximación.

Temario de Análisis de funciones de varias variables

1. Límites y continuidad.
2. Derivadas parciales y diferenciabilidad.
3. Regla de la cadena, derivadas direccionales y gradientes.
4. Planos tangentes y rectas normales.
5. Derivadas parciales de orden superior.
6. Aproximación por polinomios de Taylor.
7. Teorema de la función inversa.
8. Teorema de la función implícita.
9. Divergencia, laplaciano y rotacional.
10. Máximos y mínimos: puntos críticos, puntos silla y Hessiano.
11. Integrales dobles: Integrales iteradas, integrales dobles, teorema de Fubini, cálculo de áreas y cambio de variable (coordenadas polares).
12. Integrales triples: cálculo de integrales triples y volúmenes, teorema de cambio de variable, integrales en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

Temario de Análisis vectorial

1. Campos vectoriales
2. Integrales de línea.

3. Integrales de superficie.

4. Teorema de Green.

5. Teorema de la Divergencia.

6. Teorema de Stokes.

Guía de estudio

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Probar que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ si y sólo si $\lim_{x\to a^-} f(x) = b = \lim_{x\to a^+} f(x)$.

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en $c \in [a, b]$ y $k \in \mathbb{R}$. Probar que:

   a) kf es diferenciable en $c \in [a, b]$ y $(kf)'(c) = kf'(c)$,

   b) $f + g$ es diferenciable en $c \in [a, b]$ y $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$,

   c) fg es diferenciable en $c \in [a, b]$ y $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + g'(c)f(c)$,

   d) Si $g(c) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es diferenciable en $c \in [a, b]$ y $(\frac{f}{g})'(c) = \frac{f'(c)g(c)-g'(c)f(c)}{(g(c))^2}$.

3. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ derivable en el punto $a \in X \cap X'$. Si $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son sucesiones de puntos en X tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ y $x_n < a < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = f'(a)$.

4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Demostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$.

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $[a, b]$ tal que $f'(x) \neq 0$, para cada $x \in [a, b]$. Probar que:

   a) f es inyectiva y estrictamente creciente o decreciente,

   b) f^{-1} es diferenciable en $f([a, b])$,

   c) Para cada $y \in f([a, b])$, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

6. Probar que: si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función, $x_0 \in [a, b]$ y f es diferenciable en x_0, entonces f es

continua en x_0.

7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua sobre (a, b) con derivada $f'(x)$ finita en todo $x \in (a, b)$ excepto posiblemente en $c \in (a, b)$. Si $\lim\limits_{x \to c} f'(x)$ existe y tiene el valor de A, probar que $f'(c)$ también existe y tiene el valor A.

8. Hallar la integral indicada.
   $\int \sqrt{2x^2 - 1}dx$ $\quad$ $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx$ $\quad$ $\int \frac{x^3+x+1}{x^4+2x^2+1}dx$

9. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A'$, $b \in B'$ y $f : A \times B \to \mathbb{R}$. Suponga que:

   a) $\lim\limits_{y \to b} f(x, y)$ existe para todo $x \in A$.

   b) $\lim\limits_{x \to a} f(x, y)$ existe uniformemente sobre B.

   Demostrar que los límites iterados $\lim\limits_{x \to a} \lim\limits_{y \to b} f(x, y)$, $\lim\limits_{y \to b} \lim\limits_{x \to a} f(x, y)$ y el doble $\lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$ existen y todos son iguales.

10. Analizar la diferenciabilidad de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   Verificar que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existen en cada punto de $\mathbb{R}^2$ y que f no es continua en $(0, 0)$.

12. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Probar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), entonces existe $x \in (a, b)$ tal que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|Df(x)\||b - a|$$

13. Utilizar el Teorema de la Divergencia para evaluar $\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$, donde S es la superficie del sólido Q acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas y $\mathbf{F}$ es el campo indicado.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2 + \cos z)\mathbf{i} + (x^2 y + \sin z)\mathbf{j} + e^z \mathbf{k},$$

$$S : z = 8 \text{ y } z = \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

14. Evaluar la integral siguiente, usando el Teorema de Stokes:

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz,$$

donde C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$ y la orientación de C es en sentido contrario al de las manecillas del reloj en el plano xy.

Bibliografía

1. L. Leithold, *El cálculo con geometrá anaítica*, Ed. Harla México, cualquier edición.

2. M. Spivak, *Calculus*, Editorial Reverté, 3ª Edición 2012.

3. T.M. Apostol, *Calculus I*, Editorial Reverté, 2011.

4. T.M. Apostol, *Calculus II*, Editorial Reverté, 2010.

Álgebra

Temario de Álgebra lineal

1. Matrices y determinantes.
2. Sistemas de ecuaciones lineales.
3. Espacios vectoriales. Subespacios.
4. Bases.
5. Transformaciones lineales.
6. Isomorfismos.

Temario de Álgebra moderna

1. Grupos. Subgrupos.
2. Grupos cíclicos. Grupos abelianos.
3. Homomorfismos e Isomorfismos de grupos.
4. Anillos.
5. Anillos conmutativos, dominios enteros, ideales.
6. Homomorfismos e Isomorfismos de anillos.

Guía de estudio

1. Sea $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y sea $H_1 = \{A \in V : A^t = A\}$, $H_2 = \{A \in V : A^t = -A\}$

   a) Demuestra que H_1 y H_2 son subespacios.

   b) Demuestra que $V = H_1 \oplus H_2$.

c) Obtén una base para cada uno de ellos y da su dimensión.

2. Sea $T : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, dada por $T\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-b & c-2d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Demuestra que T es una transformación lineal

   b) Obtén su núcleo e imagen. Da el rango y la nulidad.

   c) Obtén la representación matricial de T respecto a las bases canónicas.

   a) Sea A una matriz invertible de tamaño $n \times n$. Defínase $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$, por $T(X) = AXA^{-1}$. Demuestra que T es un isomorfismo.

   b) Sea lineal $T : V \to W$ una transformación lineal, donde V y W son espacios vectoriales de dimensión finita. Demostrar que si $\dim V < \dim W$ entonces T no puede ser sobreyectiva.

   c) Para $V = P_2(R)$, y $B = \left\{1 + x^2, 1 + 2x + x^2, -x^2\right\}$ base para V. Obtén la base dual B^* para V^*

3. Sea $T : P_2(R) \to P_2(R)$ dada por $T(a + bx + cx^2) = (-a - 3c) + (3a + 2b + 3c)x + (-3a - c)x^2$. Determina si T es diagonalizable, si es así, obtén una base B formada de vectores propios de T, la representación matricial $[T]_B^B$ y la matriz de cambio de base Q de B a E.

4. Si T es un operador diagonilizable de un espacio vectorial V de dimensión finita, prueba que T^2 también diagonalizable.

5. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal inyectiva, prueba que $S \subset V$ es linealmente independiente en V si y sólo si $T(S)$ es linealmente independiente en W.

6. Sea $H = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : p\,'(x) - 2p(x) = 0\}$. Demuestra que H es un subespacio de $P_3(\mathbb{R})$.

7. Sea $T : P_1(R) \to D_{2\times 2}(R)$ dada por $T(a + bx) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & 2a-b \end{pmatrix}$, donde $D_{2\times 2}(R)$ es el espacio vectorial de las matrices diagonales de 2×2.

a) Demuestra que T es una transformación lineal.

b) Obtén su núcleo e imagen, así como una base para cada uno de ellos y su dimensión.

c) Es T un isomorfismo?

d) Obtén la representación matricial de T, $[T]_{B_1}^{B_2}$, donde

$$B_1 = \{1 + x, 1 - x\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Determina si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable, si lo es, obtén una matriz diagonal D y una matriz invertible Q tal que $A = QDQ^{-1}$

4. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal inyectiva, prueba que $S \subset V$ es linealmente independiente en V si y sólo si $T(S)$ es linealmente independiente en W.

5. Si T es un operador diagonilizable de un ev V de dimensión finita, prueba que para todo $p(t) \in P(F)$ se cumple que $p(T)$ es también diagonalizable.

6. Sea A una matriz cuadrada cuyo polinomio característico es $f(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_{n-1} t^{n-1} + (-1)^n t^n$. Deducir que $a_0 = \det A$ y que A es invertible si y sólo si $a_0 \neq 0$.

7. **Sea** $A \in M_{m\times n}(F)$**,** demostrar que para cualquier escalar $c \neq 0$**,** se cumple que $rango(cA) = ran(A)$.

8. *a*) .Sea G un grupo finito con mas de un elemento. Demuestra que si los únicos subgrupos de G son $\{e\}$ y el mismo G, entoces G es cíclico y de orden primo.

   b) .Demuestra que todo grupo cíclico de orden primo tiene exactamente $p - 1$ generadores.

   c) Demuestra que todo subgrupo de índice 2del grupo G es normal en G.

9. Sea $T : G \to G'$ un isomorfismo. Demuestre que:

   a) G es abeliano si y sólo si G' es abeliano

   b) G es cíclico si y sólo si G' es cíclico.

   c) g es generador de G si y sólo si $T(g)$ es generador de G'.

   d) Demuestra que todo grupo de orden 33 es cíclico.

10. Un ideal P de un anillo conmutativo R se dice primo si siempre que $ab \in P$ se cumple que o bien $a \in P$ o bien $b \in P$. Demuestra que

    a) Todo ideal maximal de $\mathbb{Z}$ es primo.

    b) El ideal P del anillo conmutatitvo R es primo si y sólo si R/P es un dominio entero.

    c) Todo ideal maximal del anillo $Q[x]$ es primo.

11. Sea $\mathbb{R}^*$ el conjunto de todos los números reales distintos de cero. Defínase $a * b$ en $\mathbb{R}^*$ por $|a|b$.

    a) Muéstrese que $*$ da un operación binaria asociativa en $\mathbb{R}^*$.

    b) Muéstrese que existe una identidad izquierda para $*$ y un inverso derecho para cada elemento en $\mathbb{R}^*$.

    c) Con esta operación binaria, ¿$\mathbb{R}^*$ es un grupo?

    d) Explíquese la importancia de este ejercicio

12. Sea G un grupo abeliano y sean H y K subgrupos cíclicos finitos con $o(H) = r$ y $o(K) = s$

    a) Muéstrese que si r y s son primos relativos, entonces G contiene un subgrupo cíclico de orden rs.

    b) Muéstrese que G contiene un subgrupo cíclico cuyo orden es el mínimo común múltiplo de r y s.

13. El signo de una permutación par es $+1$, el signo de una permutación impar es -1. Obsérvese que la transformación $\Psi : S_n \longrightarrow \{+1. -1\}$, dada por $\Psi(\rho) = signo(\rho)$, es un homomorfismo donde a $\{+1. -1\}$ se toma con la multiplicación. ¿Cuál es el kernel?

14. Sean G y $G^{\cdot}$ grupos y sean H y $H^{\cdot}$ subgrupos normales de G y $G^{\cdot}$, respectivamente. Sea Φ un homomorfismo de G en $G^{\cdot}$. Muéstrese que Φ induce un homomorfismo de natural $\Phi : G/H \longrightarrow G^{\cdot}/H^{\cdot}$ siempre que $\Phi(H) \subset H^{\cdot}$.

15. Sea G un grupo. Muéstrese que la relación $A \approx B$ si y solo si $A = g^{-1}Bg$ para alguna $g \in G$ es una relación de equivalencia en G. Algunas clases de equivalencia solo contienen un elemento, caracteriza dichas clases.

16. Sea A un anillo con elemento unitario. Definamos otras operaciones en A, por: $a \oplus b = a+b+1$ y $a \otimes b = ab+a+b$. Sea A^* el conjunto A con estas operaciones. Prueba que A^* es un anillo.

17. Demuestra que la característica de un dominio entero o es cero o es un número primo.

18. Pruébese que cualquier homomorfismo de un campo es inyectivo o es el homomorfismo cero.

Bibliografía

1. Friedberg, Insel, Spence, *Linear Algebra*, Prentice Hall, Fourth Edition 2003.

2. J. Fraleigh, *Álgebra lineal*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1ª Edición 1989.

3. I.N. Herstein, *Álgebra moderna*, Editorial Trillas, 1999.

4. J.B. Fraleigh, *Abstract Algebra*, Addison-Wesley, Seventh Edition, 2003.

Ecuaciones diferenciales

Temario

1. Modelos Matemáticos con ecuaciones diferenciales.
2. Teorema de existencia y unicidad.
3. Soluciones de ecuaciones diferenciales mediante series de potencias.
4. Soluciones de ecuaciones diferenciales a través de Transformada de Laplace.
5. Sistemas de ecuaciones lineales ordinarias.

Guía de estudio

1. Determine las regiones del plano xy en la cual la ecuación diferencial $(4-y^2)y' = x^2$ tiene una única solución por cada punto (x_0, y_0) en las regiones.
2. *a*) Encuentra dos soluciones del problema con valores iniciales $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ sujeto a $y(0) = 0$.

   b) ¿Por qué las condiciones del teorema de existencia y unicidad no se satisfacen para el problema anterior?
3. Despreciando las altas tasas de emigración y de homicidios, la población de la ciudad de Nueva York satisface la siguiente ley logística

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{25}p - \frac{1}{(25)10^6}p^2,$$

   donde t se mide en años.

   a) Modifique la ecuación para tomar en cuenta el hecho de que 9000 personas se mudan anualmente a las afueras de la ciudad, y de que 1000 personas son asesinadas en el mismo periodo.

   b) Suponga que la población de Nueva York en 1970 era de 8 000 000. Calcula la población para el futuro. ¿Qué sucede cuando $t \to \infty$?

4. Un tanque contiene S_0 lb de sal disueltas en 200 galones de agua. En el tiempo $t = 0$ entra agua que contiene 1/2 lb de sal por galón, con un gasto de 4 gal/min, y la solución homogenizada sale del depósito con la misma intensidad. Determinar la concentración de sal en el tanque para todo tiempo $t > 0$.

5. La ecuación diferencial siguiente se llama ecuación de Airy, y aparece en el estudio de la difracción de la luz, de las ondas de radio alrededor de la superficie de la tierra, en aerodinámica y en la flexión de una columna vertical delgada que se pandea bajo su propio peso: $y'' + xy = 0$. Proporcione dos soluciones en series de potencias linealmente independientes.

6. Resuelva la ecuación $y'' + y\cos x = 0$, usando series de potencias. Sugerencia: $x = 0$ es un punto ordinario.

7. *a*) Probar que si f es continua a trozos sobre cada $[0, b]$, $b > 0$, y f es de orden exponencial α, entonces

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad s > \alpha, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

   donde $F = \mathcal{L}\{f\}$.

   b) Usar el ejercicio anterior para encontrar

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} kt\}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\ln \frac{s-3}{s+1}\right\}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\right\}.$$

8. Resolver la siguiente ecuación

$$y'(t) = \cos t + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau, \quad y(0) = 1.$$

9. Determine todos los vectores $\mathbf{X}_0$ tales que la solución del problema de valor inicial

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$$

   es una función periódica del tiempo.

10. Resolver el problema de valor inicial

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t\cos(2t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bibliografía

1. Boyce W. E., DiPrima R. C., *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, quinta edición, Limusa Wiley, 2010.

2. Hirsh M. W., Smale S., *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*, Alianza editorial, 1974.

3. Shepley L. Ross, *Differential Equations*, Denklemler KORKMAZ, 1984.

4. Dennis G. Zill, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, Cengage Learning, Novena edición, 2011.